ISTITUTO INTERNAZIONALE STUDI AVANZATI DI
SCIENZA DELLA RAPPRESENTAZIONE DELLO SPAZIO
Geometria proiettiva, Geometria descrittiva, Rilevamento, Fotogrammetria

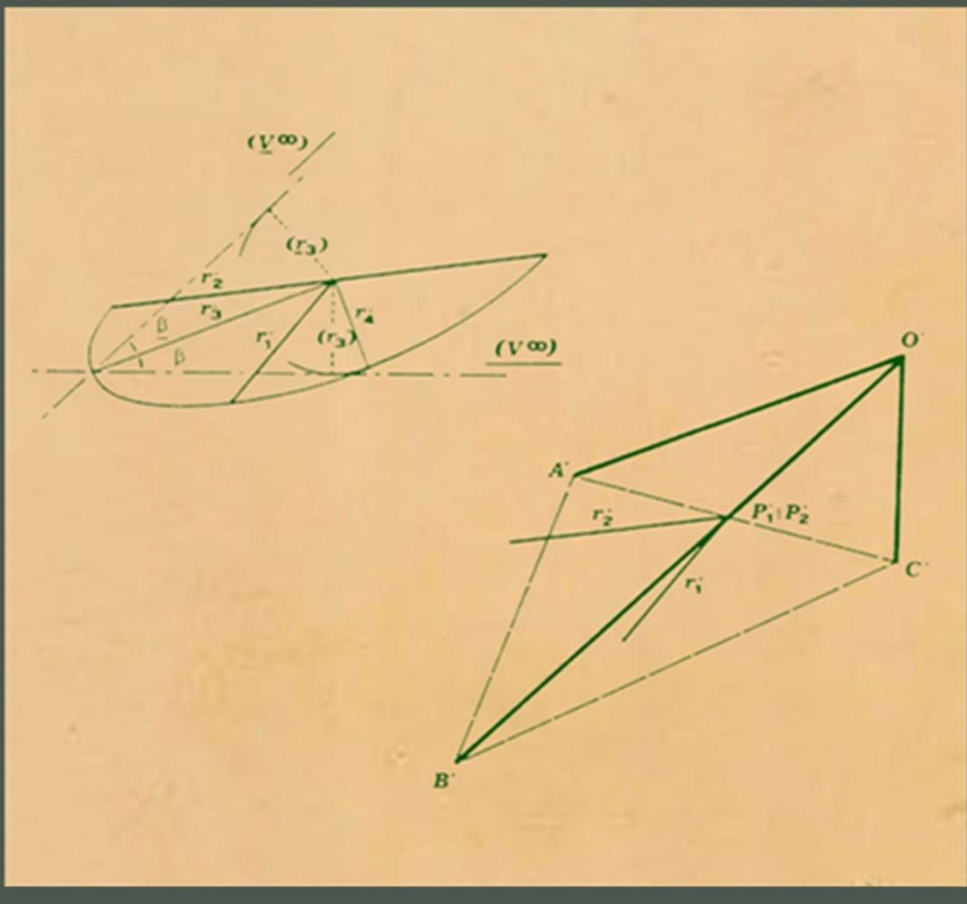
INTERNATIONAL INSTITUTE FOR ADVANCED STUDIES OF
SPACE REPRESENTATION SCIENCES
Projective geometry, Descriptive geometry, Survey, Photogrammetry

Palermo, Italia

Università degli Studi di Palermo

Giuseppe Maria Catalano

DAL PASSATO AL FUTURO: UNA NUOVA DIMOSTRAZIONE DEL TEOREMA FONDAMENTALE DELL'ASSONOMETRIA



1994

DAL PASSATO AL FUTURO: UNA NUOVA DIMOSTRAZIONE DEL TEOREMA FONDAMENTALE DELL'ASSONOMETRIA

Giuseppe Maria Catalano

A metà del secolo scorso (1853) Karl Pohlke enuncia il noto teorema che porta il suo nome, teorema fondamentale per la proiezione assonometrica, riportato da Guglielmo Fiedler nel suo trattato di geometria descrittiva del 1874 col seguente enunciato: "*tre segmenti di lunghezza e direzione arbitrarie che partono da un punto e che sono in un piano, possono sempre considerarsi come la proiezione parallela sul piano di tre lunghezze eguali prese sopra tre assi OX,OY,OZ ortogonali tra loro. Donde si vede che si possono prendere arbitrariamente le direzioni delle immagini degli assi (purché tutte e tre non coincidano) ed i rapporti di accorciamento (purché due di questi non si prendano eguali a zero)"*(1).

La dimostrazione concepita da Pohlke faceva riferimento, secondo Loria (2), a tre ellissi, aventi centro comune in O' e semidiametri coniugati in O'X', O'Y', O'Z' , ellissi ritenute il risultato di una proiezione parallela di tre circonferenze massime di una sfera di centro O disposte su tre piani mutuamente ortogonali.

Tuttavia il matematico tedesco non pubblicò tale dimostrazione, di cui farebbe cenno (2) un suo discepolo , Herman Amandus Schwarz, ed altri matematici dimostrarono presto il suo assunto.

In seguito, nel 1863, lo stesso Pohlke decise di pubblicare la soluzione di Schwarz, la prima di carattere elementare (3), ed è sempre Schwarz che successivamente insieme a Theodor Reye, suo coetaneo, generalizza il teorema, estendendo l'enunciato a tre segmenti dello spazio non più uguali e mutuamente ortogonali, ma di cui siano fissati *"le mutue inclinazioni ed i mutui rapporti"* (2).

La dimostrazione del teorema originario riportata da Fiedler, circa un ventennio dopo l'enunciazione di Pohlke (1874), risulta ancora, come è noto, assai ardua e complessa nella comprensione, lunga e laboriosa nella esecuzione (in figura 1 è riportata soltanto una fase del procedimento) volendo determinare le due posizioni del piano del quadrangolo O'X'Y'Z', tali che esso possa assumersi come la proiezione parallela del tetraedro OXYZ avente tre spigoli appartenenti ad O uguali e mutuamente ortogonali. Il problema principale della dimostrazione può considerarsi nel complesso come un caso particolare della determinazione generale dei sistemi solidi collineari, quando cioè di due tetraedri che si corrispondono vertice a vertice, secondo un centro improprio (sistemi affini), uno di essi diviene, usando l'espressione di Fiedler, *"infinitamente sottile, cioè un quadrangolo piano"*.

Il teorema non richiede l'ortogonalità degli assi OX,OY,OZ e dunque si estende implicitamente ad una terna qualsiasi.

Molto simile a quella di Fiedler in sviluppo teorico la lunga dimostrazione riportata da Gino Fano nei primi anni di questo secolo (4). Altrettanto complessa e laboriosa la dimostrazione geometrica che, pochi anni dopo, nel 1919, Francesco Severi riporta nelle sue "Lezioni di geometria descrittiva" (5), presentata suddivisa in due parti, la prima delle quali si configura in un lemma teso a dimostrare come *"in un prisma triangolare si può sempre determinare una sezione simile ad un triangolo dato"*.

Tale lemma senz'altro originale, basato sul confronto di innumerevoli angoli, segmenti e triangoli, appare nel suo insieme notevolmente esteso e articolato, anche se permette di snellire la seconda parte del teorema, che, utilizzando la conservazione dei rapporti semplici tra il triedro e la sua proiezione su un piano, dimostra la similitudine tra la terna SA,SB,SC sul quadro e la terna ottenuta sezionando il prisma proiettante il triedro con un piano che determina per intersezione un triangolo A'B'C' simile ad ABC.

Non meno lunga e complessa, anche se apparentemente dotata di maggiore chiarezza delle precedenti dimostrazioni, è quella riportata da Luigi Campedelli (6). Essa, molto simile peraltro alla dimostrazione riportata da Gino Loria (7) nel 1925 nei suoi "Metodi di geometria descrittiva", è infatti preceduta da un primo lemma che, dati due fasci di rette di centri O_1 ed O_2 su due piani distinti π_1 e π_2 corrispondenti in una arbitraria proiettività ω, dimostra che *"è possibile disporre il piano π_2 in modo che sopra di esso il fascio O_2 risulti costituito dalla proiezione ortogonale del fascio O_1"*.

A tale lemma, dalla dimostrazione per nulla breve, si appoggia quindi un secondo lemma, il quale, dati due triangoli XYZ e X'Y'Z' insieme ad un punto improprio S_{∞}, dimostra ancora come *"è possibile (e in due modi diversi) proiettare XYZ da S_{∞} in un triangolo simile a X'Y'Z', situato sopra un piano π opportunamente disposto rispetto a S_{∞} (e determinato, in due modi diversi, a meno di uno spostamento parallelo)".*

In questo secondo lemma e nel teorema che ne segue si fa ricorso sempre alla proiettività ed in particolare alla prospettività fra segmenti dello spazio e segmenti proiettati sul piano, attraverso innumerevoli operazioni sui rapporti semplici che ne derivano (6).

Lo sviluppo del teorema, che risulta frantumato nella dimostrazione di svariati casi particolari, ha però il pregio di abbracciare l'estensione enunciata da Schwarz e Reye, non soltanto considerando nell'ipotesi una qualsiasi terna cartesiana, ma anche rimanendo invariato il procedimento quando i tre segmenti OX,OY ed OZ abbiano mutui rapporti liberamente assegnati.

Tralasciando adesso di insistere sui vari contributi che i matematici hanno apportato nel tempo, da Pohlke, Schwarz, Reye, Fiedler... sino a Campedelli, al famoso teorema ristretto ed esteso, quanto esposto basta per richiamare la notevole difficoltà di una dimostrazione tanto complessa da ometterne generalmente il contenuto in molti testi e nella prassi didattica.

Ma lo sviluppo di una disciplina scientifica può ben paragonarsi alla vita di un albero, i cui rami si moltiplicano e si estendono tanto più quanto più si irrobustisce il tronco, quanto più questo è vivo ed attinge alle radici allargandosi ed innalzandosi. Una scienza ha cioè bisogno di migliorare i suoi princìpi, fortificare le sue basi, semplificandole ed estendendole, in modo da edificare maggiormente e più agevolmente su di esse.

E' dunque questo lo spirito che anima la presentazione di una nuova dimostrazione del teorema fondamentale dell'assonometria, la quale distinguendosi per brevità, semplicità e immediatezza, estende ulteriormente i risvolti dei precedenti enunciati dimostrando, tra l'altro, come si esporrà tra breve, che i tre assi x',y',z' cui i tre segmenti appartengono, possono riguardarsi come la proiezione di infinite terne distinte $\sigma_1,\sigma_2...\sigma_n$ ... di assi cartesiani, aventi gli stessi angoli reciproci prefissati, comunque disposte nello spazio, da relativi centri di proiezione distinti $V_1^{\infty},V_2^{\infty}...V_n^{\infty}...$.

La nuova dimostrazione

Si fissi rispetto a π una terna σ di assi x,y,z, di tracce X,Y,Z, racchiudenti gli angoli ϕ_1,ϕ_2,ϕ_3 liberamente scelti. Al variare del centro di proiezione, il punto O', proiezione dell'origine O del sistema, può coincidere con qualsiasi punto del quadro ed i tre assi x',y',z', proiezione di x,y,z, purchè almeno due di essi siano distinti, possono racchiudere tutte le possibili terne di angoli (9). Dunque ad ogni terna σ' per X,Y,Z sul quadro può farsi corrispondere sempre, al variare del centro di proiezione, la stessa terna σ per X,Y,Z, prefissata nello spazio e ciò potrebbe ripetersi per qualsiasi terna σ_n, racchiudente gli stessi angoli ϕ_1,ϕ_2,ϕ_3 della σ, sicché:

1) fissati liberamente ϕ_1,ϕ_2,ϕ_3 in σ_n, i tre assi x',y',z' di una qualsiasi terna σ' prefissata su π possono riguàrdarsi come la proiezione di infinite terne distinte σ_n, comunque disposte nello spazio, da relativi centri di proiezione V_n^{oo} distinti.

2) a qualsiasi centro V_n^{oo} corrisponde una posizione di σ_n proiettata in σ'.

Se dunque A'O',B'O',C'O' sono le proiezioni di tre segmenti AO,BO,CO per O, comunque scelti, sugli assi della σ_n (fig.2), ρ' la terna di assi per A',O',C' avente origine in B', può affermarsi che agli infiniti centri, che per la 1) proiettano σ_n in σ' appartiene necessariamente il centro V^{oo} che per la 2) proietta pure ρ_n in ρ' e quindi AO,BO,CO in A'O',B'O',C'O'.

Considerando poi la simmetria rispetto alla giacitura ortogonale a V^{oo} e rispetto al quadro, si può infine enunciare che:

assegnata ad arbitrio sul quadro una terna σ' di segmenti A'O',B'O',C'O' per O', purché almeno due di essi siano distinti, essa può sempre considerarsi come la proiezione da un centro improprio V^{oo} di una terna σ di segmenti dello spazio AO,BO,CO per O, dei quali siano fissati gli angoli ed i rapporti reciproci,ovvero della terna simmetrica di σ rispetto alla giacitura ortogonale a V^{oo}, o ancora di una delle due terne simmetriche di queste rispetto al quadro (essendo $\underline{V}^{oo}$ simmetrico di V^{oo}), o infine di una delle infinite terne ottenute traslando le quattro terne nella direzione del relativo centro di proiezione. Inoltre i tre assi x',y',z', cui i segmenti appartengono, possono riguardarsi come la proiezione di una delle infinite terne di *assi distinte ,σ_n,, avente gli stessi angoli reciproci prefissati, comunque disposta nello spazio, dal relativo centro di proiezione V_n^{oo}, o di una delle infinite terne ottenute traslando σ_n secondo V^{oo}.*

Ovviamente i due centri simmetrici V^{oo} e $\underline{V}^{oo}$ coincidono quando sono ortogonali a π.

Se, infine, gli angoli ϕ_1,ϕ_2,ϕ_3 sono retti ed i rapporti fra i segmenti AO,BO,CO pari all'unità, si ricade nell'enunciato di Pohlke.

La determinazione dei centri

Supponiamo adesso che, data σ' e noti ϕ_1,ϕ_2,ϕ_3 ed AO,BO,CO, si voglia conoscere la posizione dei centri V^{oo} e $\underline{V}^{oo}$ e quindi quella delle relative terne rispetto al quadro. Tale problema si risolve abbastanza semplicemente considerando che il punto intersezione di B'O' e A'C' è proiezione dei punti P_1 di BO e P_2 di AC (fig.3). Essi dunque in proiezione ortogonale (fig.4), con la base ABC su π, individuano perfettamente la direzione dei due centri coincidente rispetto alla terna: il ribaltamento del piano proiettante P_1 e P_2 permette di misurare allora l'angolo α compreso tra la direzione P_1-P_2 ribaltata in (P_1)-P_2 ed il piano ABC.

Per conoscere la posizione di V^{oo} e $\underline{V}^{oo}$ rispetto al quadro nella proiezione obliqua (fig.3), basta riportare in essa la proiezione della semicirconferenza c perpendicolare a P_1-P_2, considerando che la proiezione obliqua dei raggi coniugati r_1 ed r_2 sulla base ABC (in proiezione ortogonale r_1* ed r_2*, fig.4) coincide con la proiezione r_1' ed r_2' degli stessi su π (fig.3) ed inoltre che nella trasformazione collineare tra le due proiezioni, ortogonale ed obliqua, non mutano i rapporti semplici (sicché è immediato ricavare r_1', r_2' da r_1^*,r_2^*).

Tracciata allora, a parte, la semiellisse c' proiezione della c, conviene ribaltare il piano per il semiasse maggiore r_3' ortogonale a π, essendo, come è noto, il semiasse minore r_4' uguale al raggio della c e dunque ad r_3. Sul piano ribaltato le tangenti alla circonferenza di raggio r_4' assumono le direzioni dei centri ribaltati (V^{oo}) e ($\underline{V}^{oo}$) racchiudenti gli angoli uguali β e $\underline{\beta}$ col quadro, essendo (r_3) ed ($\underline{r}_3$) le due possibili posizioni del raggio perpendicolare ai due centri.

Il rapporto tra i raggi r_3 ed r_1 porge ovviamente il rapporto tra le scale delle due proiezioni.

G.M.C.

Note

1) G. FIEDLER, *Trattato di Geometria Descrittiva*, Le Monnier, Firenze 1874.

2) G.LORIA, *Storia della Geometria Descrittiva*, Milano 1921.

3) H. SCHWARZ, Journal von Crelle, Bd. 63, 1863.

4) G. FANO, Lezioni di Geometria Descrittiva, Paravia, Torino 1910.

5) F.SEVERI, Lezioni di Geometria Descrittiva, La litotipo, Padova 1919.

6) L. CAMPEDELLI, Lezioni di Geometria, vol.II, CEDAM, Padova 1972.

7) G.LORIA, Metodi di Geometria Descrittiva, Hoepli, Milano 1925.

8) altrimenti σ non sarebbe una terna solida, ma piana.

9) si ricordi che al variare delle rette x' ed y' nei fasci di centri X ed Y la costanza degli angoli ϕ_1' e ϕ_2' da esse racchiusi in O', fa sì che tale punto appartenga sempre ad una circonferenza c per X ed Y e la retta z' ad un fascio avente per centro un punto della c, dacché esiste sempre ed è unica la retta z' per O' e Z.

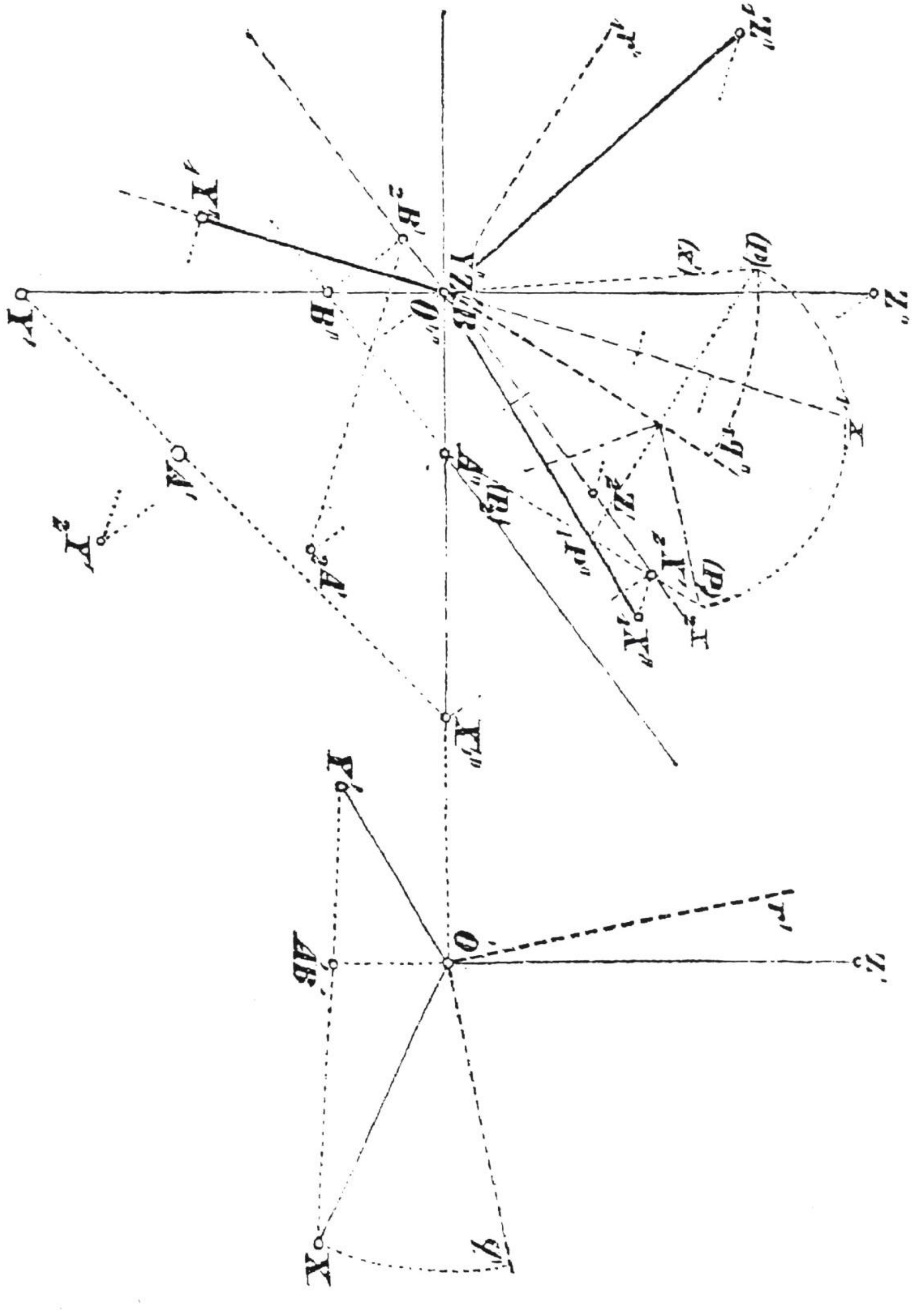


Fig. 1 Una delle fasi della dimostrazione del teorema fondamentale riportata da G. Fiedler (1874).

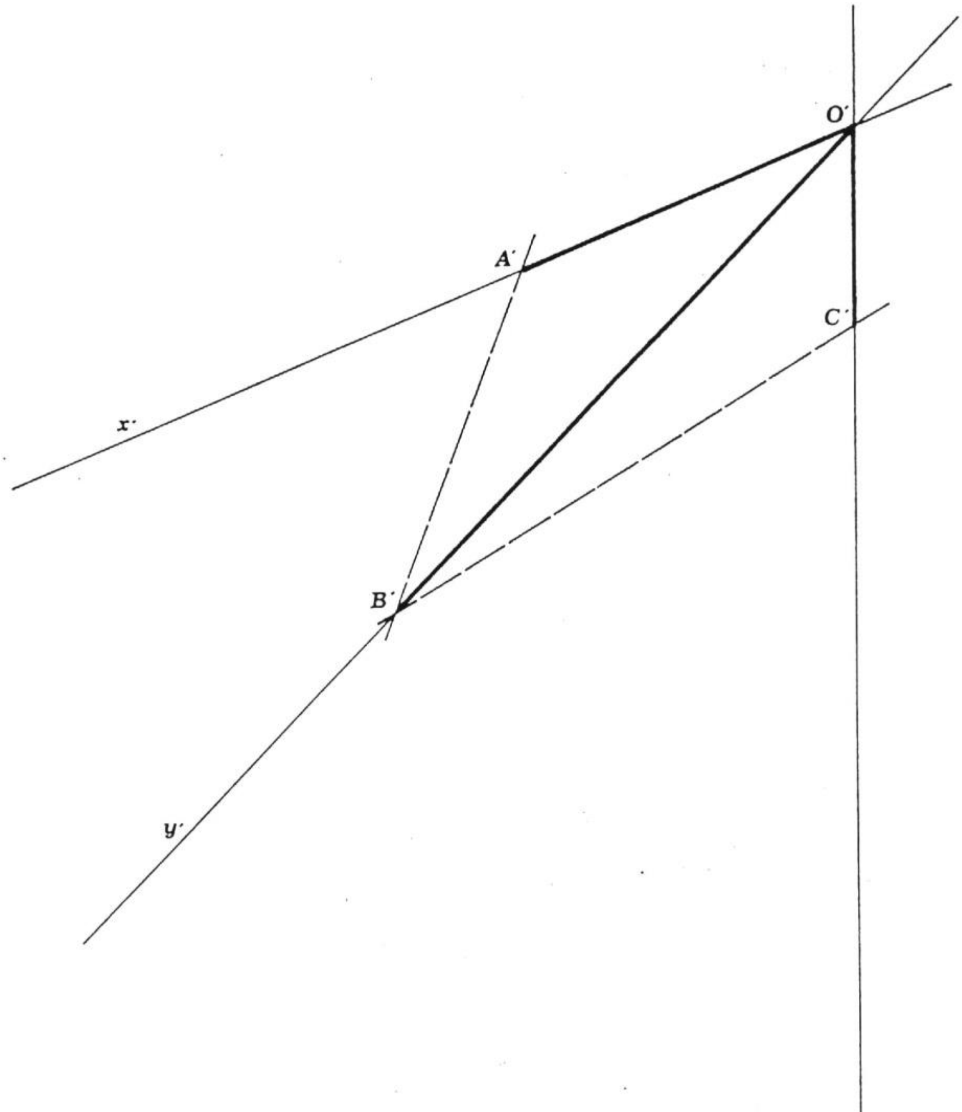
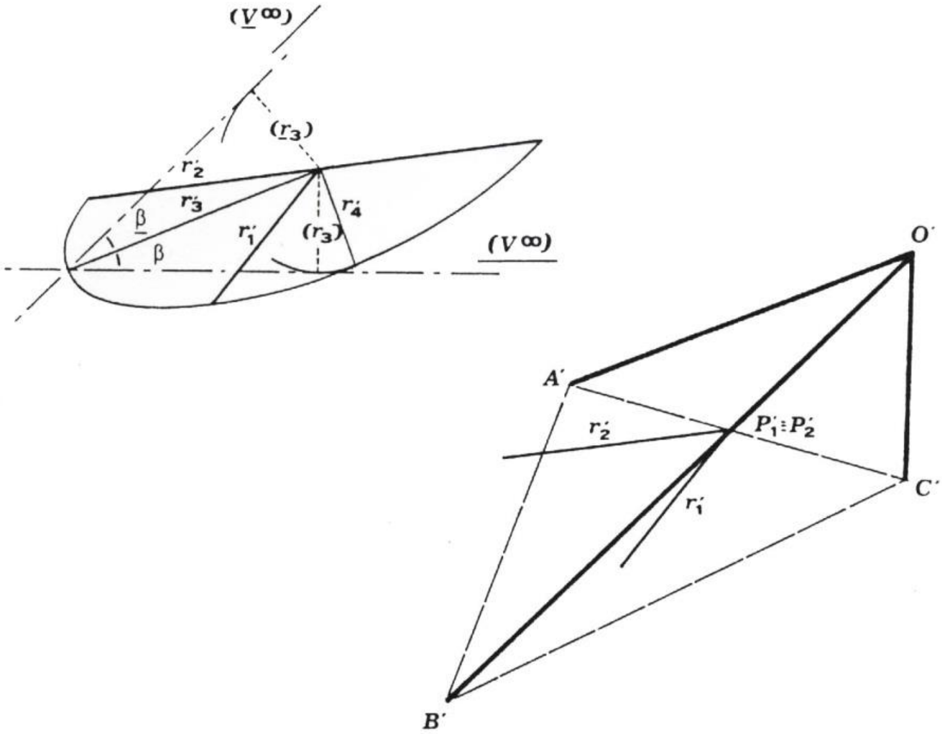
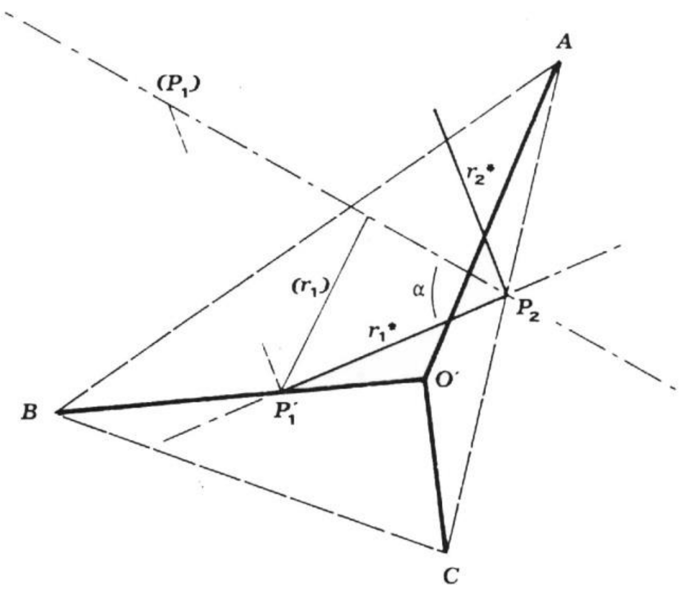


fig.2



($\underline{V}^{\infty}$)
($\underline{r}_3$)
r_2'
r_3'
$\underline{\beta}$
β
r_1'
(r_3)
r_4'
(V^{∞})
O'
A'
r_2'
$P_1' \equiv P_2'$
C'
r_1'
B'

fig.3



A
(P_1)
r_2*
(r_1)
α
r_1*
P_2
O'
B
P_1'
C

fig.4